Acknowledgements

The author would like to thank Prof. Dr. K. MOLIÈRE for his consistent help and encouragement and for providing the opportunity to carry out this research. Helpful discussions with Prof. M. B. WEBB and the Drs. K. KAMBE, G. LEHMPFUHL, F. FORSTMANN, and A. R. MOON are acknowledged. The author would further like to thank the members of the Abt. Prof. MOLIÈRE for the many considerations extended him, and Prof. M. B. WEBB for the time to compile the manuscript.

Gleichzeitige Bestimmung von Elektronenkonzentration und Elektronenstoßzahl in einem örtlich langsam veränderlichen Magnetoplasma

W. MUSCHLER

Max-Planck-Institut für Aeronomie, Abteilung Weltraumphysik, Lindau (Harz)

(Z. Naturforsch. **25 a**, 1578—1583 [1970]; eingegangen am 5. September 1970)

A previous paper [1] is continued and a wave propagation experiment is treated, which seems suitable for simultaneous determination of electron concentration and electron collision frequency in a plasma permeated by a stationary magnetic field. Electron concentration and electron collision frequency are parameters of the Appleton-Hartree-formula, which describes the complex refractive index of the medium penetrated by the wave. On the other hand the refractive index can be expressed by the complex ratio of the electric and magnetic wave components, if the W.K.B. solutions of coupled wave equations are used. These are valid for a (locally) slowly varying medium. — The complex wave polarisation is another characteristic of the magnetoplasma. It is also defined by simple field strength relations and presents itself for application in the experiment. When both refractive index and wave polarisation are determined by amplitude and phase measurements, electron concentration and electron collision frequency can easily be deduced from the complete Appleton-Hartree-formula.

§ 1. Vorbetrachtungen

Die folgenden Darlegungen beziehen sich auf Messungen in einem Plasma, wie es durch die Ionosphäre der Erde gegeben ist. Es wird als horizontal geschichtet aufgefaßt, d. h., es werden vertikale Gradienten der Elektronenkonzentration und der Elektronenstoßzahl angenommen.

Es wird ein rechtwinkliges, rechtshändiges Koordinatensystem zugrunde gelegt, dessen z-Achse sich in vertikaler Richtung erstreckt und dessen x-Achse so orientiert ist, daß der Vektor des äußeren Magnetfeldes in die x-z-Ebene zu liegen kommt [2].

Die zur Messung dienende elektromagnetische Welle habe ihre Wellennormale ebenfalls in vertikaler Richtung. Sie sei elliptisch polarisiert, und zwar habe die Polarisationsellipse hinsichtlich Achsenverhältnis, Lage in der x-y-Ebene und Drehsinn der Feldvektoren die Eigenschaften einer der beiden möglichen „charakteristischen" Wellenpolarisationen [3] des anisotropen Mediums.

Die zur Untersuchung der höhenabhängigen Elektronenkonzentration und Elektronenstoßzahl eingesetzte Meßsonde werde durch einen Träger in vertikaler Richtung bewegt. Sie rotiere dabei um eine vertikale Achse.

§ 2. Anwendung der vollständigen Appleton-Hartree-Formel

Zur Beschreibung der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen im magnetfelderfüllten, ionisierten gasförmigen Medium wird die vollständige Appleton-Hartree-Formel [4] herangezogen. Sie lautet:

$$n^2 = 1 - \frac{X}{1 - i\,Z + i\,Y_L\,A} \tag{2.1}$$

mit $A = \dfrac{i}{Y_L}\left[\dfrac{Y_T^2}{2(1-X-i\,Z)} \mp \sqrt{\dfrac{Y_T^4}{4(1-X-i\,Z)^2} + Y_L^2}\right]$

und

$X = \omega_N^2/\omega^2$;

$\omega_N^2 = N_e\,e^2/(\varepsilon_0\,m) = (2\,\pi\cdot\text{Plasmafrequenz})^2$,

N_e = Elektronenkonzentration,

e = Ladung des Elektrons,

ε_0 = Dielektrizitätskonstante des Vakuums,

[1] W. MUSCHLER, Z. Naturforsch. **25 a**, 106 [1970], im Text auch mit (1) zitiert.

[2] K. G. BUDDEN, Radio Waves in the Ionosphere, Cambridge University Press, Cambridge 1966, S. 47.

[3] Siehe Anm. [2], Gl. (5.13).

[4] Siehe Anm. [2], Gl. (6.1).

m = Masse des Elektrons;
$Y = \omega_H/\omega$;
ω_H = $|e B/m| = 2\pi\cdot$Gyrofrequenz,
B = magnetische Kraftflußdichte,
Y_L = $-Y \cos\Theta$,
Y_T = $-Y \sin\Theta$,
Θ = Neigung zwischen Wellennormale und Richtung des äußeren magnetischen Feldes;
$Z = \nu/\omega$;
ν = mittlere Elektronenstoßzahl,
ω = $2\pi\cdot$Meßfrequenz.

Durch das Auftreten der Quadratwurzel mit den beiden möglichen Vorzeichen erfaßt die Formel die beiden in Frage kommenden Ausbreitungsarten (ordentliche und außerordentliche Welle) des anisotropen Mediums.

Im Falle des magnetfeldfreien Plasmas vereinfacht sich diese Beziehung erheblich. Hierfür gilt

$$n^2 = 1 - X/(1 - iZ). \tag{2.2}$$

Das früher beschriebene Verfahren (1) ging davon aus und ermöglichte eine gleichzeitige Bestimmung von X und Z, also von Elektronenkonzentration und Elektronenstoßzahl, für den genannten Sonderfall. Hierzu wurden die beiden Bestimmungselemente von n, nämlich $|n|$ und $\operatorname{arc} n$, herangezogen.

Für den hier zu besprechenden Fall setzen wir Y_L und Y_T, also Y und Θ, als bekannt voraus.

Es scheint weniger lohnend zu sein, Gl. (2.1) in Analogie zu obigem Beispiel so aufzulösen, daß X und Z allein als Funktion von $|n|$ und $\operatorname{arc} n$ dargestellt sind. Statt dessen wird davon ausgegangen, daß auch der Ausdruck A durch direkte Messung gewonnen werden kann, denn A ist identisch mit der Wellenpolarisation ϱ (s. Anm. [3]). Diese ist durch experimentell zugängliche Feldstärkerelationen definiert (§ 4). Somit kann neben n auch $A \equiv \varrho$ als Meßgröße gelten, und die Auflösung der Appleton-Hartree-Formel nach X und Z steht unter einem günstigeren Aspekt. Davon wird im folgenden ausgegangen und aufgezeigt, wie unter solchen Voraussetzungen X und Z gleichzeitig im Magnetoplasma bestimmt werden können.

§ 3. Ermittlung des komplexen Brechungsindex n

Wie im Falle (1) wird davon Gebrauch gemacht, daß

$$n \equiv |n|\, e^{-i\varphi} = HZ_0/E, \tag{3.1}$$

also

$$|n| = |HZ_0|/|E| \tag{3.2}$$

und

$$\operatorname{arc} n = -\varphi = \operatorname{arc} HZ_0 - \operatorname{arc} E. \tag{3.3}$$

Die für ein homogenes Medium aus der Wellengleichung direkt ableitbare Beziehung (3.1) setzt bei Anwendung auf ein örtlich veränderliches Medium die Gültigkeit von Näherungslösungen voraus. Sind die Änderungen des Mediums „genügend langsam", so sind auch für das magneto-ionische Medium WKB-Lösungen zu erhalten. Diese lauten bei senkrechter Inzidenz der Welle für beide in Frage kommenden Ausbreitungsarten und für die zunächst allein interessierenden x- und y-Komponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärke folgendermaßen [5]:

a) aufsteigende ordentliche Welle:

$$\begin{aligned} E_x^{\text{o}} &= \frac{-1}{w_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{n_0}}\exp(-i\,\Phi_0),\\ E_y^{\text{o}} &= \frac{-\varrho_0}{w_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{n_0}}\exp(-i\,\Phi_0),\\ H_x^{\text{o}} Z_0 &= \frac{\varrho_0}{w_0}\sqrt{n_0}\exp(-i\,\Phi_0),\\ H_y^{\text{o}} Z_0 &= \frac{-1}{w_0}\sqrt{n_0}\exp(-i\,\Phi_0), \end{aligned} \tag{3.4}$$

mit $w_0 = \sqrt{2(\varrho_0^2 - 1)}$ und $\Phi_0 = k \int_0^z n_0\,dz - \omega t$.

b) aufsteigende außerordentliche Welle

$$\begin{aligned} E_x^{\text{x}} &= \frac{-i}{w_{\text{x}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n_{\text{x}}}}\exp(-i\,\Phi_{\text{x}}),\\ E_y^{\text{x}} &= \frac{-i\,\varrho_{\text{x}}}{w_{\text{x}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n_{\text{x}}}}\exp(-i\,\Phi_{\text{x}}),\\ H_x^{\text{x}} Z_0 &= \frac{i\,\varrho_{\text{x}}}{w_{\text{x}}}\sqrt{n_{\text{x}}}\exp(-i\,\Phi_{\text{x}}),\\ H_y^{\text{x}} Z_0 &= \frac{-i}{w_{\text{x}}}\sqrt{n_{\text{x}}}\exp(-i\,\Phi_{\text{x}}), \end{aligned} \tag{3.5}$$

mit $w_{\text{x}} = \sqrt{2(1 - \varrho_{\text{x}}^2)}$ und $\Phi_{\text{x}} = k \int_0^z n_{\text{x}}\,dz - \omega t$,

ferner $\varrho_0\,\varrho_{\text{x}} = 1$ (siehe Anm. [6]).

Damit gilt nach Gl. (3.4) bzw. Gl. (3.5) im langsam veränderlichen Magnetoplasma:

$$n_0 = H_y^{\text{o}} Z_0/E_x^{\text{o}} = -H_x^{\text{o}} Z_0/E_y^{\text{o}} \tag{3.6}$$

und

$$n_{\text{x}} = H_y^{\text{x}} Z_0/E_x^{\text{x}} = -H_x^{\text{x}} Z_0/E_y^{\text{x}}. \tag{3.7}$$

Die Brechungsindizes n_0 und n_{x} sind also dadurch zu erhalten, daß man die im Plasma gemessenen Feldstärkekomponenten gemäß Gl. (3.6) und Gl.

[5] Siehe Anm. [2], S. 405.
[6] Siehe Anm. [2], Gl. (5.19).

(3.7) zueinander in Beziehung setzt. Die Verhältnisse sind komplex und werden nach den Gln. (3.1) bis (3.3) durch Amplituden- und Phasenmessungen gewonnen.

§ 4. Bestimmung der komplexen Wellenpolarisation ϱ

Wir benutzen wiederum die Gln. (3.4) und (3.5) und erhalten daraus unmittelbar:

$$\varrho_0 = \frac{E_y{}^0}{E_x{}^0} = -\frac{H_x{}^0\, Z_0}{H_y{}^0\, Z_0} \tag{4.1}$$

und

$$\varrho_x = \frac{E_y{}^x}{E_x{}^x} = -\frac{H_x{}^x\, Z_0}{H_y{}^x\, Z_0}\,. \tag{4.2}$$

Diese Gleichungen entsprechen den Definitionsgleichungen der Wellenpolarisation [2]. Sie schreiben vor, daß zur ϱ_0- und ϱ_x-Ermittlung die zueinander senkrechten elektrischen oder magnetischen Feldstärkekomponenten heranzuziehen sind. Ihr komplexes Verhältnis gewinnt man für beide Ausbreitungsarten gemäß

$$\varrho = |\varrho| \cdot e^{i\beta} \tag{4.3}$$

aus dem Verhältnis $|\varrho|$ der Amplitudenbeträge und aus der Phasendifferenz β, wobei

$$|\varrho| = \frac{|E_y|}{|E_x|} = \frac{|H_x|}{|H_y|} \tag{4.4}$$

und

$$\begin{aligned} \operatorname{arc} \varrho = \beta &= \operatorname{arc} E_y - \operatorname{arc} E_x \\ &= \pi + \operatorname{arc} H_x - \operatorname{arc} H_y\,. \end{aligned} \tag{4.5}$$

§ 5. Die Sensoren der Meßanordnung

Die Ermittlung des *Brechungsindex* macht die Verwendung eines Sensors für das elektrische und eines anderen für das magnetische Wechselfeld erforderlich. Beide liegen senkrecht zueinander. Die von ihnen gebildete Ebene erstreckt sich im Experiment parallel zur x-y-Ebene.

Die Bestimmung der *Wellenpolarisation* ist mit Hilfe eines Paares rechtwinklig gekreuzter elektrischer oder magnetischer Sensoren möglich. Da ein Sensor dieses Paares schon vorliegt (n-Bestimmung), ergänzt ein dritter die Meßanordnung zur Lösung der zweiten Teilaufgabe. Er liegt in der Ebene der beiden ersten Sensoren.

Das Koordinatensystem wurde eingangs bereits definiert. Die mit den Sensoren gewonnenen Feldstärkewerte müssen den speziellen Koordinatenrichtungen zugeordnet werden können. Dies ermöglicht ein weiterer Sensor für das äußere *stationäre Magnetfeld*, der in definierter Weise gegenüber den Wechselfeldsensoren orientiert ist.

Da die Meßsonde beim Aufstieg um die z-Achse rotiert, ergibt sich eine periodische Anzeige der Sensoren. Während einer einzelnen Sondenumdrehung fallen viermal zur direkten n-und ϱ-Bestimmung geeignete Feldstärkedaten an [vgl. Gln. (3.6) und (4.1) bzw. Gln. (3.7) und (4.2)].

§ 6. Ermittlung von X und Z aus n und ϱ

In Analogie zur Herleitung der Gln. (1.15) und (1.16) in (1) gewinnt man aus der Appleton-Hartree-Formel (2.1) die folgenden Beziehungen:

$$X = (1 - Y_L\,\zeta)\, Q_1 \quad \text{und} \tag{6.1}$$

$$Z = (1 - Y_L\,\zeta)\, Q_2 + Y_L\,\eta\,, \quad \text{wobei} \tag{6.2}$$

$$Q_1 = 2 + (|n|^4 - 1)/(1 - |n|^2 \cos 2\varphi)\,, \tag{6.3}$$

$$Q_2 = (|n|^2 \sin 2\varphi)\,/(1 - |n|^2 \cos 2\varphi)\,, \tag{6.4}$$

$$\zeta = |\varrho| \sin\beta \quad \text{und} \quad \eta = |\varrho| \cos\beta\,. \tag{6.5), (6.6}$$

Damit sind Elektronenkonzentration und Elektronenstoßzahl durch die Bestimmungselemente des komplexen Brechungsindex und durch die Bestimmungselemente der komplexen Wellenpolarisation ausgedrückt.

Für den Sonderfall eines stoßfreien Magnetoplasmas ($Z = 0$, $\varphi = 0$, $n = |n| = \mu$, $\beta = \pm\pi/2$) ergibt sich zur Bestimmung der Elektronenkonzentration der Ausdruck

$$X = (1 \mp Y_L\,|\varrho|)\,(1 - |n|^2)\,. \tag{6.7}$$

§ 7. Grenzen für die Anwendbarkeit des Verfahrens

7.1. Fehlerfortpflanzung

Die Ergebnisse des letzten Abschnittes legen die Frage nahe, wie sich die Meßfehler für $|n|$, φ, $|\varrho|$ und β zu resultierenden Fehlern für X und Z fortsetzen. Diese lassen sich, dem bereits beschriebenen Vorgehen [1] entsprechend, berechnen.

7.2. Dämpfung der Welle

Die hier angestellten Betrachtungen gelten für ein absorbierendes Plasma. Die Nachweisbarkeit der Welle wird vom Ausmaß der Dämpfung bestimmt.

Während des Fortschreitens der Welle im Plasma wird eine Dämpfungsgrenze erreicht, jenseits welcher Messungen erschwert oder unmöglich sind. Für die beiden Ausbreitungsarten des anisotropen Mediums ergeben sich unterschiedliche Dämpfungsgrenzen.

7.3. Gültigkeitsbereich der theoretischen Voraussetzungen

Wesentliche Voraussetzung für die Anwendbarkeit des Verfahrens ist die Gültigkeit der WKB-Lösungen der gekoppelten Wellengleichungen. Sie werden ungültig für Plasmazonen, welche durch auftretende Reflexion oder Kopplung gekennzeichnet sind, d. h., welche Ursprungsgebiete von entgegengesetzt laufenden Wellen der gleichen Ausbreitungsart bzw. von gleich- oder entgegengesetzt laufenden Wellen der komplementären Ausbreitungsart sind. Als Kriterien solcher Zonen können Kopplungskoeffizienten [7] und Kopplungsparameter [8] herangezogen werden. Sind diese nicht hinreichend klein, so ist die Anwendung des Verfahrens auf den jeweiligen Plasmabereich nicht möglich.

7.4. Überlagerung von hin- und rücklaufenden Wellen

a) Gleiche Ausbreitungsart

In einer vorangegangenen Arbeit [9] wurde die Auswirkung der Überlagerung hin- und rücklaufender gedämpfter, linear polarisierter Wellen zu partiellen stehenden Wellen auf die Anwendbarkeit des KB-Verfahrens hin untersucht. Dabei zeigte sich, daß diese nicht eingeschränkt wird, da sich im Abstand einer Viertelwellenlänge, gemessen in Ausbreitungsrichtung, Punkte finden lassen, welche die Bestimmungselemente $|n|$ und φ des komplexen Brechungsindex festzustellen erlauben.

Die hier diskutierten elliptisch polarisierten Wellen lassen sich aus zwei linear polarisierten Wellen mit rechtwinklig zueinander geneigten Polarisationsebenen und mit bestimmter Phasendifferenz zusammengesetzt denken. Auf diese wirken sich die Überlagerungserscheinungen getrennt aus. Daher ist die n-Bestimmung auch beim Auftreten rücklaufender elliptisch polarisierter Wellen der gleichen Ausbreitungsart möglich. Diese Folgerung wird durch quantitative Rechnung bestätigt.

Die Wellenpolarisationen sind für hin- und rücklaufende Wellen der gleichen Ausbreitungsart innerhalb desselben Plasmabereiches identisch. Damit bleibt die Wellenpolarisation auch bei Überlagerung hin- und rücklaufender Wellen gleicher Ausbreitungsart erhalten und der Messung unvermindert zugänglich. Quantitative Beweisführung ist auch hier möglich.

b) Komplementäre Ausbreitungsarten

Das gleichzeitige Auftreten verschiedener Ausbreitungsarten im Meßbereich der Sonde ist eine unerwünschte Situation, da zwei verschiedene Brechungsindizes und zwei verschiedene Wellenpolarisationen zur Messung gelangen. Der Einsatz des Meßverfahrens ist nur sinnvoll, wenn derartige Einflüsse vernachlässigt werden können.

7.5. Richtungsunterschied zwischen Strahlweg und Wellennormale

Im anisotropen Plasma verlaufen Strahlweg und Wellennormale nicht notwendig parallel. Im Fall der vorausgesetzten senkrechten Inzidenz bleibt die Wellennormale zwar vertikal, doch tritt eine Strahlversetzung ein, also ein Auswandern des Strahles aus seiner ursprünglichen Ausbreitungsrichtung [10, 11]. Da weiter vorausgesetzt war, daß sich die Meßsonde vertikal bewegt, kann der Fall eintreten, daß in bestimmten Höhen Strahlen zum Nachweis gelangen, die nicht mehr dem „Sollstrahl“ zugeordnet werden können. Dann wäre mit Wellennormalen zu rechnen, die gegen die Vertikale mehr oder weniger geneigt sind. Auf solche Wellen lassen sich die vorstehenden theoretischen Betrachtungen nicht anwenden.

Es scheint wünschenswert, die Lage der Wellennormale überprüfen zu können. Hierzu eignet sich ein Sensor, der in vertikaler Richtung registriert. Da bei einer im anisotropen Medium laufenden Welle Längskomponenten des elektrischen Feldes auftreten, nicht aber bei der magnetischen Komponente [2], ist für den genannten Zweck die Verwendung eines Sensors für das magnetische Wechselfeld angebracht.

[7] Siehe Anm. [2], Gln. (18.82), (18.103).
[8] Siehe Anm. [2], Gln. (18.49), (19.3).
[9] W. Muschler, Z. Naturforsch. **25 a**, 482 [1970].
[10] Siehe Anm. [2], S. 246.
[11] J. M. Kelso, Radio Ray Propagation in the Ionosphere, McGraw-Hill Book Co., New York 1964, S. 310.

Der Auswanderung des Meßstrahles aus der Sondenbahn ließe sich für einen bestimmten Höhenbereich durch örtliche Versetzung des Bodensenders gegenüber der Bahnachse der Sonde Rechnung tragen.

Keine Strahlversetzung wird für eine ordentliche Welle erwartet, die das äußere Magnetfeld senkrecht oder parallel durchsetzt [12].

§ 8. Anwendung der erweiterten magnetoionischen Theorie

Bei der Herleitung der Appleton-Hartree-Formel wird die Stoßzahl unter vereinfachten Annahmen eingeführt. Dort wird vorausgesetzt, daß alle Elektronen gleiche durchschnittliche Geschwindigkeit aufweisen und die mittlere Zahl ihrer Stöße mit den neutralen Teilchen des Plasmas von ihrer Geschwindigkeit unabhängig ist. Untersuchungen an Stickstoff [13] zeigten aber, daß die Stoßzahl der Elektronen ihrer Energie proportional ist. Davon ausgehend konnten Brechungsindex und Wellenpolarisation eines Magnetoplasmas unter der Annahme einer Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen neu abgeleitet werden [14]. In diesen Beziehungen tritt die mittlere Stoßzahl $\nu_{\rm m}$ von Elektronen mit einer wahrscheinlichsten Energie $E_{\rm w} = k\,T$ auf.

Zwischen der Stoßzahl ν der Appleton-Hartree-Formel und der Stoßzahl $\nu_{\rm m}$ in den Beziehungen nach Sen und Wyller lassen sich für Sonderfälle im Größenverhältnis von $\nu_{\rm m}$, ω, $\omega_{\rm H}$ und für besondere Θ-Werte Zuordnungen in einer einfachen Art angeben [14, 15, 16]. Diese ermöglichen eine weiterhin brauchbare Anwendung der Appleton-Hartree-Formel. Für allgemeine Fälle werden jedoch Betrachtungen an Hand der erweiterten Theorie erforderlich.

Die von der erweiterten Theorie gelieferten Beziehungen sind nicht mehr algebraisch. Eine Auflösung nach den Größen X und Z ist dort ausgeschlossen. Um dennoch von den Sen-Wyller-Formeln vollen Gebrauch machen zu können, soll in Anlehnung an ein ähnliches Vorgehen [17] folgendermaßen verfahren werden: Die mit Hilfe der Appleton-Hartree-Formel aus den Meßwerten für n und ϱ gewonnenen X- und Z-Werte werden als erste Näherungslösung aufgefaßt. Diese werden in die Beziehungen für n und ϱ der erweiterten Theorie eingesetzt und durch Iteration mit geeigneten Iterationsgleichungen so korrigiert, daß Übereinstimmung der Meßdaten mit den durch die erweiterte Theorie einander zugeordneten Daten besteht. — Es wird als vorteilhaft angesehen, daß dieser Prozeß bei den gegebenen experimentellen Ausgangsdaten nicht nur auf die Sen-Wyller-Beziehung für den Brechungsindex [18], sondern auch auf diejenige für die Wellenpolarisation [19] angewendet werden kann. Beide Beziehungen lassen sich — wie Gl. (2.1) — zu einem gekürzten Ausdruck zusammenfassen.

§ 9. Der Sonderfall $\Theta = \pi/2$, $\varrho = 0$

Die Parameter dieses Sonderfalles gelten für die ordentliche Welle, die sich senkrecht zum äußeren Magnetfeld fortpflanzt. Sie ist wegen $\varrho = 0$ linear polarisiert — mit dem elektrischen Feldvektor in x-Richtung und damit in Richtung des äußeren stationären Magnetfeldes. Die physikalisch bedingten Vereinfachungen lauten explizit:

a) Zur Beschreibung des Brechungsindex dient die Gleichung des magnetfeldfreien Falles, Gl. (2.2). Entsprechend treten an die Stelle der Gleichungen des § 6 für X und Z die Lösungen des Falles (1), und es gelten die dort angestellten Betrachtungen über Fehlerfortpflanzung und Dämpfung der Welle.

b) ϱ ist wegen $Y_{\rm L} = 0$ höhenunabhängig (§ 2), und der Kopplungsparameter [8] hat den konstanten Wert $\psi = 0$. Das Auftreten der komplementären Ausbreitungsart ist demnach nicht zu erwarten, und der Gültigkeitsbereich der WKB-Lösungen kann mit Hilfe der Resultate für das magnetfeldfreie Medium [1] geprüft werden.

c) Auf das Ausbleiben der Strahlversetzung wurde bereits hingewiesen (Abschn. 7.5).

d) Die Beziehungen der erweiterten magneto-ionischen Theorie (Sen-Wyller-Formeln) verkürzen sich stark.

[12] Siehe Anm. [2], Gl. (5.37).

[13] A. V. PHELPS u. J. L. PACK, Phys. Rev. Letters **3**, 340 [1959].

[14] H. K. SEN u. A. A. WYLLER, J. Geophys. Res. **65**, 3931 [1960].

[15] K. DAVIES, Ionospheric Radio Propagation, Dover Publications, New York 1966, S. 88.

[16] H. RISHBETH u. O. K. GARRIOTT, Introduction to Ionospheric Physics, Academic Press, New York and London 1969, S. 62.

[17] E. A. MECHTLY, S. A. BOWHILL, L. G. SMITH u. H. W. KNOEBEL, J. Geophys. Res. **72**, 5239 [1967].

[18] Siehe Anm. [14], Gl. (27).

[19] Siehe Anm. [14], Gl. (35).

e) Die experimentelle Anordnung kann von der in [1] beschriebenen Form sein.

§ 10. Fortsetzung der Untersuchungen

Zur Klärung der in § 7 behandelten Punkte werden numerische Berechnungen durchgeführt. Dabei wird analog zu früheren Betrachtungen [1] vorgegangen. Repräsentative Verhältnisse der ungestörten irdischen Tages-Ionosphäre werden zugrunde gelegt und dafür Fehlerfortpflanzung, Dämpfung, Grenzen der WKB-Theorie, weitere Einflüsse von Reflexion und Kopplung sowie Strahlversetzung untersucht. Über die Ergebnisse dieser Arbeiten wird getrennt berichtet.

Anerkennung

Herrn Professor Dr. W. DIEMINGER, Direktor des Max-Planck-Institutes für Aeronomie, Lindau (Harz), danke ich für die Ermöglichung dieser und der vorangegangenen Untersuchungen, für stetes Interesse und beständige Förderung sowie für richtunggebende Diskussionen.

Zur Begrenzung der radialen Ausdehnung des Lichtbogenstromes durch ein axiales Magnetfeld

I. Problemstellung, Bogenmodell und typische Resultate

O. KLÜBER

Institut für Plasmaphysik, 8046 Garching b. München

(Z. Naturforsch. **25 a**, 1583—1600 [1970]; eingegangen am 16. Juli 1970)

In an arc without external magnetic field the current carrying region is identical with the conducting plasma column. This is no longer generally true if the arc is in an axial magnetic field and if the electrode radius is much smaller than the plasma radius. Radial current components then produce a rotational motion of the plasma and an azimuthal Hall current, and hence electromotive forces which try to suppress the current perpendicular to the magnetic field. In a plasma with finite viscosity the rotation is determined by the Navier-Stokes equation, which is solved here for a homogeneous plasma simultaneously with generalized Ohm's law. The results show that the plasma rotation is always an essential, and often the dominant, mechanism for guiding the arc current parallel to the magnetic field lines.

1. Problemstellung

In einer vorangegangenen Arbeit [1] wurde die Stromdichteverteilung eines Lichtbogens im Magnetfeld einer zylindrischen Spule experimentell untersucht. Es handelte sich dort um eine Anordnung, bei der der magnetische Fluß durch beide Elektrodenquerschnitte der gleiche war; daher konnte der Bogenstrom von der Anode zur Kathode fließen, ohne die Feldlinien des Spulenfeldes zu schneiden. Es zeigte sich, daß der Stromquerschnitt überall praktisch mit dem Querschnitt der durch die Wahl der Elektrodenradien ausgezeichneten magnetischen Flußröhre zusammenfällt, obwohl die leitfähige Plasmasäule über einen beträchtlichen Teil der Bogenlänge einen erheblich größeren Querschnitt als diese ausgezeichnete Flußröhre hat. Als wesentliche Ursache für den „Einschluß" des Bogenstroms wurde die Rotationsbewegung des Plasmas erkannt. Sie führt zu einer Potentialverteilung derart, daß das zum Spulenfeld senkrechte elektrische Feld durch $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ kompensiert wird, und daß das zu $\boldsymbol{B}$ parallele elektrische Feld und damit auch die Stromdichte außerhalb der ausgezeichneten magnetischen Flußröhre verschwindet.

Ganz wesentlich für das Funktionieren dieses Mechanismus ist, ob die Rotation des Plasmas durch die innere Reibung merklich beeinflußt wird oder nicht. Das zeigt sich, wenn man die Einstellung der stationären Stromdichte- und Potentialverteilung eines Lichtbogens anhand der Gln.

$$\operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0\,, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0\,, \tag{2}$$

$$\frac{1}{\sigma}\boldsymbol{j} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} - \frac{1}{e\,n_{\mathrm{e}}}\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} + \frac{1}{e\,n_{\mathrm{e}}}\nabla p_{\mathrm{e}}\,, \tag{3}$$

Sonderdruckanforderungen an Dr. O. KLÜBER, Institut für Plasmaphysik, *D*-**8046** Garching bei München.

[1] O. KLÜBER, Z. Naturforsch. **24a**, 1473 [1969].